

THÉORIE DE GALOIS EFFECTIVE : AIDE MÉMOIRE

ANNICK VALIBOUZE

Cet article recense de nombreux résultats obtenus dans diverses publications relevant de la théorie de Galois effective ; en particulier, les formules et théorèmes sur les idéaux galoisiens peuvent s'exprimer de diverses façons et sont parfois "redécouverts" par de triviales reformalisations. L'éparpillement complique également leur utilisation rapide.

Les idéaux galoisiens (dits alors de Galois) apparurent tout d'abord dans un support de cours et d'encadrement doctoral en théorie Galois effective (voir [14]) ; ce support comportant un nombre important de résultats nouveaux servit également de document de travail au projet Galois du GDR (puis de l'UMS) MEDICIS du CNRS.

Cet article a comme double objectif que 1) ne soient pas redécouverts des résultats déjà connus et 2) de les retrouver rapidement.

1. DONNÉES

- k un corps, \bar{k} une clôture algébrique de k
- x_1, \dots, x_n, x variables indépendantes sur k
- f polynôme en x de degré n à coefficients dans k
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les n racines de f dans \bar{k} :

$$f = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

2. NOTATIONS GÉNÉRALES

- \mathfrak{S}_n : groupe symétrique de degré n .
- I_n : sous-groupe identité de \mathfrak{S}_n

Date: December 16, 2010.

- A_n : sous-groupe alterné de \mathfrak{S}_n
- $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n)$, etc ...
- $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}} := x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$, etc ...
-

$$pol(\boldsymbol{y}) := \prod_{i=1}^n (x - y_i)$$

3. GROUPES

3.1 Généralités classiques

$G, H \in \mathfrak{S}_n$

- $G < H$: G sous-groupe de H
- $G \subset H$: G sous-ensemble de H
- $GH = \{gh \mid g \in G \ h \in H\}$
- Hyp. $G < H$; G_1, \dots, G_s sont les classes à droite (resp. gauche) de H modulo G si pour $i = 1, \dots, s$, $G_i = G\tau_i$ (resp. $\sigma_i G$) où $\tau_i \in H$ (resp. $\sigma_i \in H$), et H est l'union disjointe des G_i :

$$H = G_1 + \dots + G_s$$

- $G \backslash H := \{\tau_1, \dots, \tau_s\}$ est une transversale à droite de H modulo G .
- $H/G := \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ est une transversale à gauche de H modulo G .
- $[H : G] := s$, l'indice de G dans H
- G est un sous-groupe distingué (*normal*) de H si $G < H$ et

$$(\forall \tau \in H) \ G = \tau G \tau^{-1}$$

(i.e. les classes à droite et à gauche sont identiques)

- $G^\tau := \tau G \tau^{-1}$
- G sous-groupe distingué de H ssi la tranversale (droite et gauche) de H modulo G forme un sous-groupe de H noté H/G ($=G \backslash H$)

- *Action (à gauche)* de G , un groupe, sur un ensemble non vide E , toute opération notée \star :

$$\mathfrak{S}_n \times E \longrightarrow E, \quad (\sigma, x) \mapsto \sigma \star x$$

vérifiant les axiomes suivants :

- (1) $(\forall x \in E), e_G \star x = x$, où e_G est l'élément neutre de G
- (2) $(\forall x \in E), (\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}), \sigma \star (\tau \star x) = (\sigma\tau) \star x$

- $x \in E, \sigma \in G$:

$$\sigma \star E := \{\sigma \star x \mid x \in E\}$$

$$G \star x := \{\sigma \star x \mid \sigma \in G\} \quad \text{orbite de } x \text{ sous l'action de } G$$

$$G \star E := \{G \star x \mid x \in E\} = \{\sigma \star E \mid \sigma \in G\}$$

$$\text{Stab}_G x := \{\sigma \in G \mid \sigma \star x = x\} \quad \text{stabilisateur de } x \text{ dans } G$$

3.2 Actions particulières

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- \mathfrak{S}_n agit naturellement sur $E := \{1, \dots, n\}$ comme groupe de permutations :

$$\mathfrak{S}_n \times E \longrightarrow E, \quad (\sigma, j) \mapsto \sigma(j) = i_j \quad \text{si } \sigma = \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ i_1, \dots, i_n \end{pmatrix}$$

- \mathfrak{S}_n agit sur les n -uplets :

$$\sigma * \mathbf{y} := (y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)})$$

- \mathfrak{S}_n agit sur les monômes :

$$\sigma \cdot \mathbf{x}^i := (\sigma * \mathbf{x})^i = x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n}$$

et par extension \mathfrak{S}_n agit sur $k(\mathbf{x})$.

- (plus tard) $\text{Gal}_k(\boldsymbol{\alpha})$ agit sur $k(\boldsymbol{\alpha})$:
 $\Theta \in k[\mathbf{x}], \theta = \Theta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in k(\boldsymbol{\alpha}), \tau \in \text{Gal}_k(\boldsymbol{\alpha}),$

$$\beta^\tau = \Theta(\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)})$$

Rq : $\text{Gal}_k(\mathbf{x}) = \mathfrak{S}_n$ agit sur $k(\mathbf{x})$; on pourrait noter $p^\sigma := \sigma.p, p \in k(\mathbf{x})$

- (plus tard) $\text{Gal}_k(f) := \text{Aut}_k(k(\boldsymbol{\alpha}))$ agit sur $k(\boldsymbol{\alpha})$:

$$\text{Gal}_k(f) \times k(\boldsymbol{\alpha}) \longrightarrow k(\boldsymbol{\alpha}), \quad (\phi, \beta) \mapsto \phi(\beta)$$

- Notation : $r \in k[\mathbf{x}]$,

$$\sigma.r(\boldsymbol{\alpha}) := (\sigma.r)(\boldsymbol{\alpha}) = r(\sigma * \boldsymbol{\alpha})$$

- $(\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n), (\forall r \in k[\mathbf{x}]),$

$$\tau\sigma.r(\boldsymbol{\alpha}) = r(\tau\sigma * \boldsymbol{\alpha}) = \sigma.r(\tau * \boldsymbol{\alpha})$$

(i.e. permuter d'abord r avec σ puis évaluer en $\tau * \boldsymbol{\alpha}$)

3.3 Matrices des groupes et de partitions

Soient $G, H < L < \mathfrak{S}_n$. Soit \mathcal{O} l'ensemble des G -orbites de L modulo H . Pour tout $O \in \mathcal{O}$ de cardinal s , on note $Gr(G, O)$, la représentation symétrique dans \mathfrak{S}_s de l'action à gauche de G sur O ; soit le vecteur de groupes

$$Gr_L(G, H) := [Gr(G, O) \mid O \in \mathcal{O}]$$

- $Gr_L(G, H)$ ne dépend pas de la classe de conjugaison de G et H dans \mathfrak{S}_n
- $\mathcal{G}(L)$ *matrice des groupes de L*
elle est indicée en colonne et en ligne par les classes de conjugaison des sous-groupes de S_n - Soient G, H deux sous-groupes de S_n ; à l'intersection de la ligne de la classe de H et de la colonne de celle de G se trouve le vecteur de groupes $Gr_L(G, H)$.
- $\mathcal{P}(L)$ *matrice des partitions de L*
c'est la matrice déduite de $\mathcal{G}(L)$ en remplaçant les groupes par leur degré respectif.
- Les lignes de la matrice de partitions (et donc de groupes) sont toutes distinctes.

4. IDÉAUX GALOISIENS

4.1 Généralités classiques

I idéal de $k[\mathbf{x}]$, $V \subset \overline{k}^n$

- idéal définit par V dans $k[\mathbf{x}]$:

$$\text{Id}_{k[\mathbf{x}]}(V) := \{r \in k[\mathbf{x}] \mid (\forall \mathbf{b} \in V) r(\mathbf{b}) = 0\}$$

(par défaut $\text{Id}(V) := \text{Id}_{k[\mathbf{x}]}(V)$)

- idéal engendré par $r_1, \dots, r_m \in k[\mathbf{x}]$ dans $k[\mathbf{x}]$:

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle_{k[\mathbf{x}]} := \{u_1 r_1 + \dots + u_m r_m \mid u_1, \dots, u_m \in k[\mathbf{x}]\}$$

(par défaut $\langle r_1, \dots, r_m \rangle := \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{k[\mathbf{x}]}$)

- $r \in k[\mathbf{x}]$: idéal monogène $rk[\mathbf{x}] := \langle r \rangle_{k[\mathbf{x}]}$
- I maximal dans $k[\mathbf{x}]$ si $(\forall r \in k[\mathbf{x}] - I) I + \langle r \rangle = k[\mathbf{x}]$
- I_1, I_2 comaximaux si $I_1 + I_2 = k[\mathbf{x}]$
- I radical si $r^m \in I \Rightarrow r \in I$
- I, J idéaux de $k[\mathbf{x}]$; *injecteur de I dans J* :

$$\text{Inj}(I, J) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma.I \subset J\}$$

- si $V := V(I)$ est finie alors

$$(1) \quad \dim_k(k[\mathbf{x}]/\text{Id}(V)) = \text{Card}(V)$$

- si $V(I)$ est finie alors $k[\mathbf{x}]/I$ est engendré par les monômes sous l'escalier d'un base de Gröbner de I pour l'ordre lexicographique.

4.2 Idéaux galoisiens : notations et définitions

- tout idéal galoisien est radical
- $H \subset \mathfrak{S}_n$, l'idéal galoisien I_α^H défini par H et α :

$$I_\alpha^H := \{r \in k[\mathbf{x}] \mid (\forall \sigma \in H) \sigma.r(\alpha) = 0\}$$

- $I_\alpha := I_\alpha^{I_n}$
- idéal des α -relations : $\mathfrak{M} := \{r \in k[\mathbf{x}] \mid r(\alpha) = 0\} = I_\alpha$
- idéal des relations symétriques : $\mathfrak{S} := I_\alpha^{\mathfrak{S}_n}$; ne dépend pas du choix de α .
- Autres façons de voir l'idéal galoisien I_α^H définit par H et α :

$$\begin{aligned} I_\alpha^H &= \{r \in k[\mathbf{x}] \mid (\forall \sigma \in H) r(\sigma * \alpha) = 0\} \\ &= \text{Id}(H * \alpha) \\ &= \{r \in k[\mathbf{x}] \mid (\forall \sigma \in H) \sigma.r \subset \mathfrak{M}\} \end{aligned}$$

(on pourra noter $I_{\mathfrak{M}}^H := I_\alpha^H$).

- Attention : si $I_n \not\subset H$ alors $I_\alpha^H \not\subset \mathfrak{M} = I_\alpha$

4.3 Ensembles de permutations particuliers

- *groupe de décomposition de I* (aussi $\text{Stab}_{S_n}(I)$) : $Gr(I) = \text{Inj}(I, I)$
- $\text{Max}(I, \alpha)$: *plus grand ensemble de permutations définissant I_α^H avec α*
- *groupe de Galois de α sur k* :

$$(2) \quad \text{Gal}_k(\alpha) := Gr(\mathfrak{M}) = \text{Max}(\mathfrak{M}, \alpha)$$

$$(3) \quad = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid r(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma.r(\alpha) = 0 \}$$

4.4 Idéaux galoisiens purs

I est dit *pur* si $\text{Max}(I, \alpha)$ est un groupe.

Nous retrouverons ces idéaux galoisiens plus loin.

4.5 Premières propriétés

I, J, I_i idéaux galoisiens, $G, H \subset \mathfrak{S}_n$, $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{M} = I_\alpha$

- \mathfrak{M} est un idéal maximal de $k[x]$
 $(r(\alpha) = 0 \Rightarrow (\forall \sigma \in \text{Gal}_k(\alpha)), \sigma.r(\alpha) = 0 \Rightarrow r \in \mathfrak{M})$
- Cette propriété et la suivante sont exprimées sous une autre forme dans 4.6

$$I_{\sigma*\alpha}^H = I_\alpha^{\sigma H}$$

•

$$\sigma.I_\alpha^H = I_\alpha^{H\sigma^{-1}}$$

- C.P. $I_{\sigma*\alpha} = \sigma^{-1}.I_\alpha = \sigma^{-1}.\mathfrak{M}$
- \mathcal{G} un ensemble d'ensembles de permutations (i.e. inclus dans les parties de \mathfrak{S}_n) ;

$$I_\alpha^{\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G} = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} I_\alpha^G$$

•

$$(4) \quad \text{Max}(I, \alpha) = \text{Inj}(I, \mathfrak{M}) = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid r \in I \Rightarrow \sigma.r(\alpha) = 0 \}$$

$$(5) \quad = \text{Gal}_k(\alpha)H$$

$$(6) \quad = \bigcup_{G \subset \mathfrak{S}_n \mid I = I_\alpha^G} G$$

•

$$I \subset I_{\alpha}^{\text{Gr}(I)} \quad (\forall \alpha \in V(I))$$

• si H est un groupe alors

$$I_{\alpha}^H = I_{\alpha}^{\text{Gr}(I_{\alpha}^H)}$$

et

$$H \subset \text{Gr}(I_{\alpha}^H) \subset \text{Max}(I_{\alpha}^H, \alpha)$$

• $\text{Max}(I, \alpha)$ est un groupe (i.e. I est pur) si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite

$$(i) \text{Gal}_k(\alpha) < \text{Gr}(I)$$

$$(ii) \text{Gr}(I) = \text{Max}(I, \alpha) (= \text{Inj}(J, \mathfrak{M}))$$

$$(iii) \text{Gr}(I) = \text{Inj}(I, J) \text{ pour tout idéal } J \text{ contenant } I$$

• $(\forall \beta \in V(I)), \sigma \notin \text{Max}(I, \beta)$ si et seulement si

$$I + \sigma.I = k[\mathbf{x}]$$

(équivalent à : pour tout idéal maximal \mathfrak{M}' contenant I , $\sigma \notin \text{Inj}(I, \mathfrak{M}')$)• $\mathfrak{S}_n = \text{Gr}(\mathfrak{S}) = \text{Max}(\mathfrak{S}, \alpha)$ • **Correspondance galoisienne inhérente aux idéaux galoisiens**

$$(i) G \subset H \subset \mathfrak{S}_n \Rightarrow I_{\alpha}^H \subset I_{\alpha}^G$$

$$(ii) \mathfrak{S} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathfrak{M} = I_{\alpha} \Rightarrow \mathcal{I}, \mathcal{J} \text{ sont galoisiens et}$$

$$\mathfrak{S}_n \subset \text{Max}(\mathcal{I}, \alpha) \subset \text{Max}(\mathcal{J}, \alpha) \subset \text{Gal}_k(\alpha)$$

• Comme $\mathfrak{M} = I_{\alpha}^{I_n} = I_{\alpha}^{\text{Gal}_k(\alpha)}$ et $\text{Gal}_k(\alpha) = \text{Gr}(\mathfrak{M}) = \text{Max}(\mathfrak{M}, \alpha)$,

$$(\forall H \subset \text{Gal}_k(\alpha)), \quad I_{\alpha}^H = I_{\alpha}^{\text{Gal}_k(\alpha)}$$

4.5 Autres façon d'exprimer $I \subset I_{\alpha} = \mathfrak{M}$

•

$$\begin{aligned} I &= \bigcap_{\sigma \in \text{Max}(I, \alpha)} I_{\sigma * \alpha} \\ &= \bigcap_{\sigma \in \text{Inj}(I, \mathfrak{M})} \sigma^{-1}.\mathfrak{M} \end{aligned}$$

• $\mathfrak{S} \subset I \subset J \Rightarrow \bigcap_{\sigma \in \text{Inj}(I, J)} \sigma^{-1}.J \subset I$

- $\mathfrak{S} \subset I \subset J \subset \mathfrak{M}$, $H = \text{Max}(I, \alpha)$, $G = \text{Max}(J, \alpha)$ t.q.

$$H = G\tau_1 + \dots + G\tau_s \quad (*)$$

alors

$$(7) \quad I = \bigcap_{i=1}^s \tau_i^{-1}.J$$

(on peut montrer que la condition $(*)$ est toujours satisfaite)

- C.P. $G = \text{Gal}_k(\alpha)$. Soient τ_1, \dots, τ_s t.q. $\text{Max}(I, \mathfrak{M}) = G\tau_1 + \dots + G\tau_s$ alors

$$(8) \quad I = \bigcap_{i=1}^s \tau_i^{-1}.\mathfrak{M} \quad (= \bigcap_{i=1}^s I_{\tau_i.\alpha})$$

- C.P. Soit $\tau_1 = id, \dots, \tau_s$ transversale à droite de \mathfrak{S}_n modulo $\text{Gal}_k(\alpha)$.

$$(9) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{M} \cap \tau_2^{-1}.\mathfrak{M} \cap \dots \cap \tau_s^{-1}.\mathfrak{M} \quad (= I_\alpha \cap I_{\tau_2.\alpha} \cap \dots \cap I_{\tau_s.\alpha})$$

- Soit \mathcal{E} un ensemble d'idéaux galoisiens

$$I = \bigcap_{J \in \mathcal{E}} J \Rightarrow \text{Gr}(I) = \bigcap_{J \in \mathcal{E}} \text{Inj}(I, J)$$

4.6 Quelques propriétés des injecteurs

•

$$(10) \quad \text{Inj}(\sigma.I, \tau.J) = \tau \text{Inj}(I, J) \sigma^{-1}$$

- C.P. $\text{Gal}_k(\sigma.\alpha) = \text{Inj}(\sigma^{-1}.\mathfrak{M}, \sigma^{-1}.\mathfrak{M}) = \sigma^{-1} \text{Gal}_k(\alpha) \sigma$
- $H \text{Inj}(I, \mathfrak{M}) = \text{Inj}(I, \mathfrak{M}) \Rightarrow H \text{Inj}(G.I, \mathfrak{M}) = \text{Inj}(G.I, \mathfrak{M})$
- $\mathfrak{S} \subset I_i \subset J$, $i = 1, 2$;

$$(11) \quad \text{Inj}(I_1 + I_2, J) = \text{Inj}(I_1, J) \cap \text{Inj}(I_2, J)$$

- $\mathfrak{S} \subset I \subset J_i$, $i = 1, 2$; $\text{Inj}(I, J_1 \cap J_2) = \text{Inj}(I, J_1) \cap \text{Inj}(I, J_2)$
- $H \subset \mathfrak{S}_n$, $L := \text{Inj}(I, J)$;

$$\text{Inj}(H.I, J) = \bigcap_{h \in H} Lh^{-1} \text{ et } \text{Inj}(I, H.J) = \bigcap_{h \in H} hL$$

- $\text{Inj}(J, \mathfrak{M}) \text{Inj}(I, J) \subset \text{Inj}(I, \mathfrak{M})$

- Soit un polynôme f de degré n et I un idéal galoisien de f d'injecteur un groupe H . L'ensemble des idéaux galoisiens de f d'injecteur H est formé des $\sigma.I$ où σ parcourt le normalisateur de H dans S_n .

5. VARIÉTÉS

5.1 Généralités classiques

I, I_1, I_2 idéaux de $k[\mathbf{x}]$

- variété de $I : V(I) := \{\beta \in \overline{k}^n \mid (\forall r \in I) r(\beta) = 0\}$
- $V(\text{Id}(V(I))) = V(I)$
- $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow V(I) = V(I_1) \cup V(I_2)$
- I_1, I_2 comaximaux $\Leftrightarrow V(I_1) \cap V(I_2) = \{ \}$
- I radical $\Leftrightarrow I = \text{Id}(V(I))$
- I_1, I_2 radicaux ; $V(I) = V(I_1) \cup V(I_2) \Rightarrow I = I_1 \cap I_2$

5.2 Idéaux galoisiens

I idéal galoisien

•

$$(12) \quad V(I) = \text{Max}(I, \alpha) \star \alpha$$

- C.P. $V(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}_n \star \alpha$ et $V(\mathfrak{M}) = \text{Gal}_k(\alpha) \star \alpha$

La variété d'un idéal galoisien peut s'exprimer trivialement sous forme de variétés disjointes dès lors que l'on exprime $\text{Max}(I, \alpha)$ sous forme de classes à droite disjointes $G_\alpha \tau$ et que f est sans racine multiple.

6. ANNEAUX QUOTIENTS, VARIÉTÉS, IDÉAUX GALOISIENS ET INJECTEURS

Ce paragraphe doit être considéré avec attention pour concevoir qu'un même résultat peut s'exprimer de nombreuses façons selon qu'on l'exprime avec les variétés, les injecteurs, les anneaux quotients ou les idéaux galoisiens et/ou en modifiant légèrement les hypothèses pour lui donner une apparence de nouveauté.

$I = I_\alpha^L$, on a $\text{Max}(I, \alpha) = G_\alpha \tau_1 + \dots + G_\alpha \tau_s$, $\tau_i \in L$ (on peut toujours supposer que $L = \text{Max}(I, \alpha)$). Un idéal galoisien d'un polynôme sans racine multiple est radical. Notre polynôme f est supposé sans racine multiple.

•

$$\dim_k(k[\mathbf{x}]/I) = \text{Card}(V(I)) = \text{Card}(\text{Max}(I, \boldsymbol{\alpha}))$$

• C.P. idéal de $\boldsymbol{\alpha}$ -relations :

$$k[\mathbf{x}]/\mathfrak{M} \equiv k(\boldsymbol{\alpha})$$

et

$$\dim_k(k[\mathbf{x}]/\mathfrak{M}) = \text{Card}(\text{Gal}_k(\boldsymbol{\alpha}))$$

• C.P. idéal des relations symétriques

$$\dim_k(k[\mathbf{x}]/\mathfrak{S}) = n!$$

Soient V_1, \dots, V_s des variétés incluses dans $V(I)$ et L_1, \dots, L_s les ensembles maximaux de permutations tels que $V_i = L_i \cdot \boldsymbol{\alpha}$ (i.e. $L_i = G_{\boldsymbol{\alpha}} = \text{Max}(\text{Id}(V_i), \boldsymbol{\alpha})$).

L'ensemble $V(I)$ est l'union disjointe des variétés V_1, \dots, V_s ssi les ensembles de permutations L_1, \dots, L_s sont deux-à-deux disjoints et (union disjointe)

$$\text{Max}(I, \boldsymbol{\alpha}) = L_1 + \dots + L_s;$$

dans ce cas, puisque les $I_i := \text{Id}(V_i)$ sont deux-à-deux comaximaux et que $I = \bigcap_{i=1}^s I_i$, il vient (théorème des restes chinois) :

$$k[\mathbf{x}]/I = \prod_{i=1}^s k[\mathbf{x}]/I_i$$

En particulier, soient τ_1, \dots, τ_s (deux-à-deux distincts) tels que (union disjointe)

$$\text{Max}(I, \boldsymbol{\alpha}) = G_{\boldsymbol{\alpha}}\tau_1 + \dots + G_{\boldsymbol{\alpha}}\tau_s;$$

comme $I_i = \tau_i^{-1} \cdot \mathfrak{M}$ en posant $I_i = \mathfrak{M}_i$, un idéal maximal conjugué de \mathfrak{M} ,

$$k[\mathbf{x}]/I = \prod_{i=1}^s k[\mathbf{x}]/\mathfrak{M}_i \equiv k(\boldsymbol{\alpha})^s$$

7. POLYNÔMES MULTIVARIÉS PARTICULIERS

• $e_0(\mathbf{y}) = 1, e_1(\mathbf{y}), \dots, e_r(\mathbf{y}), \dots$, les *fonctions symétriques élémentaires* en $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$:

$$\begin{aligned} e_r(\mathbf{y}) &:= \sum_{m \in \mathfrak{S}_n \cdot (y_1 \dots y_r)} m & \text{si } 1 \leq r \leq n \\ e_r(\mathbf{y}) &:= 0 & \text{si } n < r \end{aligned}$$

$$e_1(\mathbf{y}) = y_1 + \dots + y_n, e_2(\mathbf{y}) = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{n-1} y_n, \dots, e_n(\mathbf{y}) = y_1 y_2 \dots y_n.$$

- $p_0(\mathbf{y}) = n, p_1(\mathbf{y}), \dots, p_r(\mathbf{y}), \dots$, les *fonctions puissances* (de Newton) en $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$:

$$p_r(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n y_i^r \quad (\forall r \in \mathbb{N})$$

- $h_0(\mathbf{y}) = 1, h_1(\mathbf{y}), \dots, h_r(\mathbf{y}), \dots$, les *fonctions complètes* en $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$:

$$h_r(\mathbf{y}) := \sum_{i_1 + \dots + i_n = r} \mathbf{y}^{\mathbf{i}} \quad (\forall r \in \mathbb{N})$$

- $e_r := e_r(\mathbf{x}), p_r := p_r(\mathbf{x}), \dots, \tilde{e}_r = e(\boldsymbol{\alpha}), \dots$

- *formules de Girard-Newton* : pour tout $m \geq 0$

$$(13) \quad p_m e_0 - p_{m-1} e_1 + \dots + (-1)^{m-1} p_1 e_{m-1} + (-1)^m m \cdot e_m = 0 \quad .$$

- **Polynôme** $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$:

$$\frac{f}{a_n} = x^n - e_1(\boldsymbol{\alpha}) x^{n-1} + e_2(\boldsymbol{\alpha}) x^{n-2} + \dots + (-1)^n e_n(\boldsymbol{\alpha})$$

- *formules de Girard-Newton* : $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$; pour tout $m \geq 0$

$$(14) \quad \widetilde{p}_m a_0 + \widetilde{p}_{m-1} a_1 + \dots + \widetilde{p}_1 a_{m-1} + m \cdot a_m = 0 \quad .$$

où $a_i = 0$ si $i > n$.

- $C_1(f), \dots, C_n(f)$, les *modules de Cauchy* de f dans $k[\mathbf{x}]$: posons $C_i := C_i(f)$

$$\begin{aligned} C_1(x_1) &:= f(x_1) \\ C_2(x_1, x_2) &:= \frac{C_1(x_1) - C_1(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &\vdots \\ C_r(x_1, \dots, x_r) &:= \frac{C_{r-1}(x_1, \dots, x_{r-2}, x_{r-1}) - C_{r-1}(x_1, \dots, x_{r-2}, x_r)}{x_{r-1} - x_r} \quad 1 < r \leq n \end{aligned}$$

•

$$(15) \quad C_{r+1} = \sum_{i=r}^n a_i h_{i-r}(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad r = 0, \dots, n-1$$

- EX. $f := x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2$

$$C_1(x_1) = x_1^4 - 2x_1^3 + 2x_1^2 + 2$$

$$C_2(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1^3 - 2(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + 2(x_2 + x_1)$$

$$C_3(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2 + x_3x_1 + x_2x_1 + x_1^2 - 2(x_2 + x_1 + x_3) + 2$$

$$C_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 + x_3 + x_2 + x_1 - 2 \quad .$$

8. POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES, MINIMAUX ET RÉSOVANTES

Généralités classiques

$\Theta \in k[\mathbf{x}]$, I idéal de $k[\mathbf{x}]$

- *endomorphisme multiplicatif induit* par Θ dans $k[\mathbf{x}]/I$:

$$\hat{\Theta} : k[\mathbf{x}]/I \longrightarrow k[\mathbf{x}]/I, \quad \bar{p} \mapsto \hat{\Theta}(\bar{p}) = \overline{\Theta \cdot p}$$

- $C_{\Theta, I}$, $M_{\Theta, I}$: polynômes caractéristique et minimal de $\hat{\Theta}$
- si k parfait alors $M_{\Theta, I}$ est la forme sans facteur carré de $C_{\Theta, I}$
- si I radical alors

$$(16) \quad C_{\Theta, I} = \prod_{\beta \in V(I)} (x - \Theta(\beta))$$

Hypothèses

$H \subset L \subset \mathfrak{S}_n$, $I = I_{\alpha}^L$, $L = \text{Max}(I, \alpha)$, $\Theta \in k[\mathbf{x}]$, $H = \text{Stab}_L(\Theta)$.

Invariants

- Θ est un H -invariant L -primitif si $H = \text{Stab}_L(\Theta)$
on pourra lire relatif à la place de primitif
- Soit $K = k(e_1, \dots, e_n)$. Θ est l'élément un H -invariant L -primitif ssi Θ est un élément K -primitif de $K(\mathbf{x})^H$ sur $K(\mathbf{x})^L$
- dans MAGMA : `RelativeInvariant` dans GAP : `PrimitiveInvariant`
- Θ est un H -invariant L -primitif α -séparable si pour tout $\sigma \in L$

$$\sigma.\Theta \neq \sigma.\Theta \Rightarrow \sigma.\Theta(\alpha) \neq \tau.\Theta(\alpha)$$

- soit M un sous-groupe de L ; alors tout H -invariant L -primitif est aussi un H -invariant M -primitif
- tout H -invariant L -primitif α -séparable est aussi un H -invariant M -primitif α -séparable
- f sans racine multiple ; il existe toujours un H -invariant \mathfrak{S}_n -primitif α -séparable pour tout sous-groupe H de \mathfrak{S}_n
- un H -invariant L -primitif est dit *universel* s'il est toujours α -séparable pour tout n -uplet α constitué de valeurs deux-à-deux distinctes
- EX. le Vandermonde $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ est un A_n -invariant \mathfrak{S}_n -primitif universel.
- $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n$; un H -invariant (on peut prendre aussi une combinaison linéaire) :

$$\Psi_{\mathbf{i}, H} := \sum_{\sigma \in H} (\sigma \star \mathbf{x})^{\mathbf{i}}$$

- si les parts de \mathbf{i} sont deux-à-deux distinctes alors $\Psi_{\mathbf{i}, H}$ est \mathfrak{S}_n -primitif (car $\sigma.(H.\mathbf{x}^{\mathbf{i}}) = H.\mathbf{x}^{\mathbf{i}} \Leftrightarrow \sigma \star (H \star \mathbf{x}) = H \star \mathbf{x} \Leftrightarrow \sigma H = H$)
- $\sigma \in L$; si Θ H -invariant L -primitif alors $\sigma.\Theta$ est un H^σ -invariant L -primitif

Résolvantes

- $G \subset \mathfrak{S}_n$, $\Theta \in k[\mathbf{x}]$, *résolvante G -relative de α par Θ* :

$$R_{\Theta, G, \alpha} := \prod_{\Psi \in G.\Theta} (x - \Psi(\alpha))$$

(on peut prendre $\Theta \in k(\mathbf{x})$ si aucun dénominateur des polynômes de $G.\Theta$ n'appartient à \mathfrak{M} ; i.e. il ne s'annule pas en α)

- on peut noter $R_{\Theta, I} := R_{\Theta, \text{Max}(I, \alpha), \alpha}$
- une résolvante L -relative de α par Θ est appelée une *H -résolvante L -relative de α*
-

$$C_{\Theta, I} = R_{\Theta, I}^{\#H}$$

- si k corps parfait alors $R_{\Theta, I} \in k[\mathbf{x}]$

- si $L = \tau_1 H + \dots + \tau_e H$ alors

$$R_{\Theta, I} = \prod_{i=1}^e (x - \tau_i \cdot \Theta(\alpha))$$

- Θ est un H -invariant L -primitif α -séparable si et seulement si $R_{\Theta, I}$ est sans racine multiple (i.e. $i \neq j \Rightarrow \tau_i \cdot \Theta(\alpha) \neq \tau_j \cdot \Theta(\alpha)$) ; dans ce cas $R_{\Theta, I}$ est la forme sans facteur carrée de $C_{\Theta, I}$, le polynôme caractéristique de $\hat{\Theta}$, et si, de plus, k est parfait alors $R_{\Theta, I} = M_{\Theta, I}$, le polynôme minimal de $\hat{\Theta}$.
- Soit $K = k(e_1, \dots, e_n)$. La résolvante générique $R_{\Theta, L, \mathbf{x}}$ est le polynôme minimal de Θ sur $K(\mathbf{x})^L$
- Tout facteur h k -irréductible de $R_{\Theta, I}$ est naturellement le polynôme minimal de chacune de ses racines sur k ;
- (k parfait) si h est un facteur k -irréductible de multiplicité 1 de la résolvante $R_{\Theta, I}$ et ne possédant aucune racine multiple alors chacune de ses racines $\sigma \cdot \Theta(\alpha)$ est un élément primitif de $k(\alpha)^{G_\alpha \cap H^\sigma}$ sur $k(\alpha)^{G_\alpha \cap L}$ où G_α est le groupe de Galois de α sur k (ici $k(\alpha)^{G_\alpha \cap L} = k(\alpha)^{G_\alpha} = k$ puisque $G_\alpha \subset L$, par hypothèse.
- h est un facteur simple sur k de la résolvante $R_{\Theta, I}$ ssi Θ est un H -invariant G_α -primitif α -séparable
- Pour toutes les subtilités concernant les facteurs des résolvantes (simples, non simples, k parfait ou non parfait) voir [18]
- pour étudier les résolvantes avec les classes doubles : voir [21]

9. GÉNÉRATEURS DES IDÉAUX GALOISIENS

Hypothèses :

I idéal galoisien, $\alpha \in V(I)$, f sans racine multiple, k corps parfait (si $g \in k[\mathbf{x}]$ est irréductible alors g est sans racine multiple)

•

$$(17) \quad \mathfrak{S} = \langle e_1 - \tilde{e}_1, \dots, e_1 - \tilde{e}_1 \rangle$$

$$(18) \quad = \langle C_1, \dots, C_1 \rangle$$

- **Théorème de l'élément primitif sur les idéaux galoisiens**

Un polynôme R est dit J -primitif de l'idéal I si $J = I + \langle R \rangle$.

I idéal galoisien, $L = \text{Max}(I, \alpha)$, $H \subset L$, Θ un H -invariant L -primitif α -séparable alors

$$(19) \quad I_{\alpha}^H = I + \langle h(\Theta) \rangle$$

où h est le facteur simple de $R_{\Theta, I}$ tel que $h(\Theta(\alpha)) = 0$

- (version effective) Soit h un facteur simple de $R_{\Theta, I}$ et β tel que $h(\Theta(\beta)) = 0$ alors

$$(20) \quad I_{\beta}^H = I + \langle h(\Theta) \rangle$$

- **Racines multiples de la résolvante** : le théorème de l'élément primitif et l'usage des matrices de groupes se généralisent. Consulter l'article [18] dans lequel un exemple concret conclut à partir d'un facteur multiple de la résolvante.

Ci-après une partie des résultats relève de l'article [4].

- $\{f_1, \dots, f_n\} \in k[\mathbf{x}]$ est un *ensemble triangulaire* si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le polynôme f_i est de degré au minimum 1 en x_i et s'exprime sous la forme :

$$f_i = x_i^{\deg_{x_i}(f_i)} + g(x_1, \dots, x_i)$$

- un ensemble triangulaire $\{f_1, \dots, f_n\}$ est dit *séparable* si f_1 est sans racine multiple pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et pour tout $\beta \in V(\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle)$, $f_i(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x)$ est sans racine multiple.
- si I est pur et f sans racine multiple alors il existe un ensemble triangulaire séparable engendrant I ; cet ensemble forme une base de Gröbner de I pour l'ordre lexicographique :

$$I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle;$$

- $\text{Init}(I) := (\deg_{x_1}(f_1), \dots, \deg_{x_n}(f_n))$: n -uplet constitué des *degrés initiaux* de I
- $H \subset \mathfrak{S}_n$, $H_{(0)} := H$, $H_{(i)} := \text{Stab}_{H_{(i-1)}}(i)$, $i = 1, \dots, n$

- $\text{Gal}_k(\boldsymbol{\alpha}) < H = \text{Gr}(I)$ (i.e. I pur), $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$,

$$(\forall \boldsymbol{\beta} \in V(I)) \quad f_i(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x) = \prod_{\tau \in H_{(i-1)}/H_{(i)}} (x - \beta_{\tau(i)})$$

(généralisable à tout idéal galoisien triangulaire)

- $\text{Gal}_k(\boldsymbol{\alpha}) < H = \text{Gr}(I)$ (i.e. I pur), pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; alors

$$\deg_{x_i}(f_i) = \frac{\#H_{(i-1)}}{\#H_{(i)}}$$

- I triangulaire, $\text{Init}(I) = (m_1, \dots, m_n)$, degrés initiaux ;

$$k[\mathbf{x}]/I = \langle \mathbf{x}^i \mid 0 \leq i_1 < m_1, \dots, 0 \leq i_n < m_n \rangle$$

- I galoisien triangulaire ;

$$\begin{aligned} (21) \quad \dim_k(k[\mathbf{x}]/I) &= \text{Card}(V(I)) \\ &= \text{Card}(\text{Max}(I, \boldsymbol{\alpha})) \\ &= \prod_{i=1}^n \deg_{x_i}(f_i) \end{aligned}$$

- si $I = \mathfrak{M} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ (\mathfrak{M} est pur) où les f_i sont appelés les *modules fondamentaux* par Tchebotarev.

- Chaque module fondamental f_i est le polynôme minimal de α_i sur $k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$.

L'objectif de la théorie de Galois effective (et donc du projet Galois) est de calculer l'idéal des relations \mathfrak{M} et le groupe de Galois $\text{Gr}(\mathfrak{M})$, son groupe de décomposition (un groupe de décomposition est facilement calculable), c'est-à-dire le corps de décomposition de f avec l'action du groupe de Galois sur ses racines.

Pour ce faire, il faut utiliser toutes les méthodes pour calculer des facteurs dans les extensions ou bien calculer une base de Gröbner d'un idéal maximal : incluant et combinant de l'interpolation multivariée (voir [7], [10]) avec du numérique, du modulaire, ...), de l'algèbre linéaire (avec du numérique, du p -adique : [23] et [22], du modulaire), des résolvantes, des matrices de groupes, la construction d'une chaîne ascendante d'idéaux galoisiens, ...; on peut supposer connaître un idéal I (à défaut l'idéal des relations symétriques) et chercher un seul idéal de sa décomposition en idéaux premiers (ils sont tous conjugués) en utilisant les injecteurs pour accélérer et orienter les calculs (voir [11]). Les informations, même partielles, sur le groupe

de Galois sont exploitables pour éviter de nombreuses étapes de calculs, voir pour calculer directement \mathfrak{M} .

Et pour tout dire, il faut mélanger toutes les méthodes pour produire un algorithme parallèle et collaboratif.

Il convient néanmoins de concevoir que les stratégies sont distinctes des techniques de calcul. Par exemple, l'interpolation multivariée peut se réaliser en modulaire ou en numérique. L'interpolation multivariée étant elle-même une technique de calcul reposant sur des informations galoisiennes. L'objectif d'établir une formule exprimant les “séparateurs” (i.e. les polynômes jouant le rôle des polynômes de Lagrange en univarié) dans le cas d'un idéal galoisien connaissant son injecteur ; dans le cas $I = \mathfrak{M}$ pour [7] restreint aux modules fondamentaux $f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x)$ linéaires en x pour [10].

Nous avons désormais des outils simples et extrêmement efficaces : par exemple, permuter une relation peut produire un module fondamental ou un élément primitif d'un idéal galoisien ; cette permutation est prévisible avant l'exécution du programme (voir Section sur les idéaux galoisiens purs ou bien [12], [19] et [8]). Ce qui signifie que les calculs sont dans ces cas instantanés. Un autre cas de calculs rapides et prévisibles : il suffit de diviser certains générateurs de \mathfrak{M} par d'autres pour obtenir immédiatement de nouveaux. Les exemples donnés dans [12] illustrent l'efficacité de ces deux techniques. Cette méthode inclut celle consistant à calculer des modules de Cauchy de certains f_i pour en déduire d'autres (voir [8]). Il est facile de reformuler ces méthodes en modifiant le contexte sans rien apporter de nouveau pour le calcul effectif.

10. IDÉAUX GALOISIENS PURS

Rappelons que I est dit *pur* si $\text{Max}(I, \alpha)$ est un groupe.

Par définition : $Gr(I) = \text{Stab}_{S_n}(I) = \text{Inj}(I, I)$ et $\text{Max}(I, \alpha) = \text{Inj}(I, \mathfrak{M})$.

On peut toujours se ramener à un idéal galoisien pur lorsque les constructions d'idéaux galoisiens sont réalisées à partir de groupes (ce qui est le cas en pratique) (voir [21]) :

Si H et E sont deux sous-groupes de \mathfrak{S}_n tels que $\text{Inj}(I, \mathfrak{M}) = HE$ et que H est un tel groupe qui est maximal dans $\text{Inj}(I, \mathfrak{M})$ alors $H.I$ est un idéal galoisien pur de groupe de décomposition H .

Le groupe H existe toujours puisque si $I = I_\alpha^E$ alors $\text{Inj}(I, \mathfrak{M}) = G_\alpha E$, G_α , groupe de Galois de α sur k .

Le choix du nombre minimal de permutations de H suffisantes au calcul de $H.I$ (en effectif, les permutations portent sur les générateurs de I) est étudié dans [12] et [8] offre une étude pratique en degré 8. Prévoir ces permutations est pré-calculable groupistiquement (c'est ce qui a été fait pour l'étude de cas dans [8]).

Si un idéal galoisien est pur alors il est triangulaire (voir [4]).

Nous avons dans ce qui précède de nombreuses conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un idéal galoisien soit pur. Nous les récapitulons ici. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) I est pur
- (2) $\text{Max}(I, \alpha)$ est un groupe
- (3) $\text{Gal}_k(\alpha) < \text{Gr}(I)$
- (4) $\text{Gr}(I) = \text{Max}(I, \alpha)$
- (5) $\text{Gr}(I) = \text{Inj}(I, J)$ pour tout idéal J contenant I (si c'est vrai pour \mathfrak{M} , c'est vrai pour tous)

$$(6) \quad \dim_k(k[\mathbf{x}]/I) = \text{Card}(\text{Stab}_{S_n}(I))$$

$$(7) \quad \text{Card}(V(I)) = \text{Card}(\text{Stab}_{S_n}(I))$$

$$(8) \quad \prod_{i=1}^n \deg_{x_i}(f_i) = \text{Card}(\text{Stab}_{S_n}(I))$$

11. CORPS DES RACINES

Théorie (presque)-classique

Généralités classiques : rappels

- Si K est un corps, une **extension** L/K est une K -algèbre L qui est un corps.
- on note $[L : K] := \dim_K L$ et on dit que L/K est *finie* si $[L : K]$ est finie et *triviale* si $[L : K] = 1$.
- un élément de L est dit *algébrique* sur K s'il est racine d'un polynôme à coefficients dans K .

- si tout élément de L/K est algébrique alors L/K est dite *algébrique*
- $\gamma \in L$, le *polynôme minimal* $\min_{\gamma,K}$ de γ sur K est l'unique polynôme unitaire à coefficients dans K tel que $\min_{\gamma,K}(\gamma) = 0$
- On dit que $\gamma \in L$ est *séparable* sur K si $\text{diff}(\min_{\gamma,K}, x)(\gamma) \neq 0$; i.e. $\min_{\gamma,K}$ ne possède pas de racine multiple.
- Une extension algébrique L/K est *séparable* si tout $\gamma \in L$ est séparable sur K .
- On dit que $P \in K[x]$ se *décompose* sur une extension L/K en produit de facteurs linéaires s'il existe $c \in K$ et $u_1, \dots, u_d \in L$ avec $P = c(x - u_1) \dots (x - u_d)$
- l'extension L est appelée un *corps de décomposition* pour P si, en plus, $L = K(u_1, \dots, u_d)$
- On dit aussi qu'un polynôme non-constant $P \in K[x]$ est *séparable* (ou sans racine multiple) s'il se décompose sur un corps de décomposition en produit de facteurs linéaires distincts (i.e. ses racines sont deux-à-deux distinctes).
- $\gamma \in L$ est séparable sur K si et seulement si $\min_{\gamma,K}$ est séparable.
- Un *corps de rupture* pour $P \in K[x]$ est une extension L/K telle qu'il existe $\gamma \in L$ avec $P(\gamma) = 0$ et $L = K(\gamma)$.
- Si L/K est une extension et $\gamma \in L$, alors $K(\gamma)$ est un corps de rupture pour $\min_{\gamma,K}$ sur K .
- un corps est dit **parfait** si toutes ses extensions finie sont séparables
- **Théorème de l'élément primitif (Lagrange)**
Si L/K est une extension séparable finie alors il existe $\gamma \in L$ tel que $L = K(\gamma)$
- Un corps \overline{K} est *algébriquement clos* s'il n'existe pas d'extension algébrique non-triviale de K . Une clôture algébrique d'un corps K est une extension algébrique \overline{K}/K qui est un corps algébriquement clos.
- Une extension algébrique L/K est dite *normale* si tout $P \in K[x]$ irréductible avec une racine dans L se décompose en produit de facteurs linéaires.
- Une extension finie est normale si et seulement si c'est le corps de décomposition d'un polynôme.

- Une extension algébrique L/K est dite **galoisienne** si elle est normale et séparable. (i.e. si pour le polynôme minimal de tout élément de L se décompose sur L en produit de facteurs linéaires distincts.)

Corps de décomposition de f

Hypothèses : k corps parfait et f séparable (i.e. sans racine multiple)

Une *extension galoisienne de k* est le corps des racines (de décomposition) d'un polynôme à coefficients dans k .

- **Corps des racines et idéal maximal**
- $k(\alpha)$ est le corps des racines (de décomposition) de f : corps des fractions de l'anneau $k[\alpha]$, l'ensemble des combinaisons linéaires finies sur k des α^i où $i \in \mathbb{N}$; c'est une extension galoisienne
- morphisme surjectif d'évaluation :

$$k[x] \longrightarrow k[\alpha], \quad p \mapsto p(\alpha)$$

de noyau \mathfrak{M} , idéal maximal.

- corps $k[x]/\mathfrak{M}$ est isomorphe à $k[\alpha]$; donc

$$k(\alpha) = k[\alpha] \simeq k[x]/\mathfrak{M}$$

•

$$(22) \quad \dim_k k(\alpha) = \dim_k(k[x]/\mathfrak{M}) = \text{Card}(\text{Gal}_k(\alpha))$$

- $\text{Gal}_k(f)$, **Groupe de Galois de f**
- $\text{Gal}_k(f) := \text{Aut}_k(k(\alpha))$ groupe des automorphismes de $k(\alpha)$ (ensemble des k -endomorphismes bijectifs de $k(\alpha)$) ; $\phi \in \text{Gal}_k(f)$ est entièrement déterminé par une bijection de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ dans lui-même.
- isomorphisme de groupes

$$\text{Gal}_k(\alpha) \longrightarrow \text{Gal}_k(f), \quad \sigma \mapsto \phi_\sigma$$

où pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\phi_\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}$

- $\sigma \in \text{Gal}_k(\alpha)$, $\gamma \in k(\alpha)$, $\gamma^\sigma := \phi_\sigma(\gamma)$

- **Attention !** $\sigma \notin \text{Gal}_k(\alpha)$;
 (i) la notation γ^σ n'a aucun sens
 (ii) $\gamma := \sum_i \lambda_i \alpha^i \in k(\alpha)$; l'égalité $\gamma = 0$ ne peut en aucun cas impliquer que $\sum_{i \in E} \lambda_i (\sigma * \alpha)^i$ soit nul ; c'est justement au groupe de Galois qu'appartient le pouvoir d'assurer cette implication pour ses éléments ; il en va de même pour $\gamma = \gamma'$ puisque $\gamma - \gamma' = 0$.

- **Corps de rupture et polynôme minimal**

- le *polynôme minimal* de $\gamma \in k(\alpha)$ sur k est le polynôme, noté $\min_{\gamma,k}$, irréductible sur k dont γ est racine
- Corps de rupture de $\gamma \in k(\alpha)$:

$$k(\gamma) = k[\gamma] \simeq k[\mathbf{x}] / \langle \min_{\gamma,k} \rangle$$

- $d := \deg_x(\min_{\gamma,k})$;

$$\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{d-1}$$

est une base de k -ev de $k(\gamma)$;

$$\dim_k(k(\gamma)) = d$$

- les *conjugués* de γ sur k sont les racines de son polynôme minimal sur k .
- les conjugués de γ sur k sont les éléments la $\text{Gal}_k(\alpha)$ -orbite de γ :

$$\min_{\gamma,k} = \prod_{\theta \in \{\gamma^\sigma \mid \sigma \in \text{Gal}_k(\alpha)\}} (x - \theta)$$

- **Sous-Groupes de $\text{Gal}_k(f)$ et sous-corps de $k(\alpha)$**

- $H < \text{Gal}_k(\alpha)$, $k(\alpha)^H := \{\gamma \in k(\alpha) \mid (\forall \gamma \in H), \gamma^\tau = \gamma\}$
- $H < \text{Gal}_k(f)$, $k(\alpha)^H := \{\gamma \in k(\alpha) \mid (\forall \phi \in H), \phi(\gamma) = \gamma\}$
- (Evariste Galois) Soit $\gamma \in k(\alpha)$; alors

$$(\forall \tau \in \text{Gal}_k(\alpha)), \gamma^\tau = \gamma \Leftrightarrow \gamma \in k$$

dit autrement :

$$k(\alpha)^{\text{Gal}_k(f)} = k$$

•

$$k(\alpha)^{I_n} = k(\alpha)$$

- **Correspondance galoisienne (Artin)**

(i) K un corps ;

$$k \subset K \subset k(\alpha) \Rightarrow (\exists H \subset \text{Gal}_k(f)), \quad K = k(\alpha)^H$$

(ii) $H \subset \text{Gal}_k(f) \Rightarrow k \subset k(\alpha)^H \subset k(\alpha)$

cette correspondance décrit une bijection entre les sous-groupes du groupe de Galois $\text{Gal}_k(f)$ et les corps intermédiaires entre k et $k(\alpha)$.

- un groupe H est un sous-groupe distingué de $\text{Gal}_k(f)$ si et seulement si l'extension $k(\alpha)^H$ de k est galoisienne

Phénomène extension-contraction : corps et idéaux galoisiens

la correspondance galoisienne inhérente aux idéaux galoisiens porte sur les **sur-ensembles** (et donc sur les sur-groupes) du groupe de Galois $\text{Gal}_k(\alpha)$ alors que la correspondance galoisienne classique inhérente aux corps (Artin) porte sur les **sous-groupes** de $\text{Gal}_k(\alpha)$ (ou bien $\text{Gal}_k(f)$) ;
soit

$$H < \text{Gal}_k(\alpha) < G \quad ;$$

nous avons

(i) H décrit un corps intermédiaire entre k et $k(\alpha)$ tandis que sur les idéaux

$$I_\alpha^H = \mathfrak{M} = I_\alpha^{\text{Gal}_k(\alpha)}$$

(ii) soit $K := k(e_1, \dots, e_n)(\mathbf{x})^G$, le corps invariant par G (voir plus bas) ; G décrit un idéal intermédiaire entre \mathfrak{S} et \mathfrak{M} tandis que sur les corps

$$\tilde{K} = k = k(\alpha)^{\text{Gal}_k(\alpha)}$$

(le \sim symbolise la spécialisation qui envoie x_i sur α_i).

C'est-à-dire que pour les idéaux, les sous-ensembles de $\text{Gal}_k(\alpha)$ sont associés au même idéal, i.e. à \mathfrak{M} , alors que pour les corps, les sur-groupes de $\text{Gal}_k(\alpha)$ sont associés au même corps, i.e. à k .

Nous pouvons voir cela encore autrement avec les k -algèbres $A_G := k[\mathbf{x}]/I_\alpha^G$. Posons $G_\alpha := \text{Gal}_k(\alpha)$:

$$(23) \quad k = k(\alpha)^{G_\alpha} = k(\alpha)^{G_\alpha \cap G} \subset k(\alpha)^H \subset k(\alpha)^{I_n} = k(\alpha) \\ \simeq A_{G_\alpha} = A_H \subset A_G \subset A_{\mathfrak{S}_n}$$

- **extensions intermédiaires**

- Notation : $K_2 < K_1$ signifie K_1/K_2 , le corps K_1 est une extension de K_2 ; i.e. K_1, K_2 corps et $K_2 \subset K_1$
- $k < K_2 < K_1 < k(\alpha)$ le *degré* $[K_1 : K_2]$ de K_1 sur K_2 est sa dimension en tant que K_2 -espace vectoriel (rappel)
- $H_1 < H_2 < \text{Gal}_k(f)$; l'indice de H_1 dans H_2 et le degré de $k(\alpha)^{H_1}$ sur $k(\alpha)^{H_2}$ sont identiques :

$$[H_2 : H_1] = [K_1 : K_2]$$

- extensions $K_3 < K_2 < K_1$

$$[K_1 : K_3] = [K_1 : K_2][K_2 : K_3]$$

- Soit $k < K_2 < K_1 < k(\alpha)$; γ est un élément K_2 -*primitif* de K_1 si $K_1 = K_2(\gamma)$
- γ est un élément K_2 -primitif de K_1 si et seulement si

$$\deg_x(\min_{\gamma, k}) = [K_1 : K_2]$$

Polynôme générique

$$pol(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^n (x - x_i) = x^n - e_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n$$

- $\mathcal{K} := k(e_1, \dots, e_n)$ est le corps des coefficients de $pol(\mathbf{x})$
- corps des racines de $pol(\mathbf{x})$: $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = k[\mathbf{x}]$
- $\text{Gal}_{\mathcal{K}}(pol(\mathbf{x})) = \mathfrak{S}_n$ (penser correspondance galoisienne)
- $\mathcal{K}(\mathbf{x})^{\mathfrak{S}_n} = \mathcal{K}$; i.e. tout polynôme symétrique s'exprime en les fonction symétriques élémentaires (théorème fondamental des fonctions symétriques)
- $L < \mathfrak{S}_n$, $\Theta \in k[\mathbf{x}]$; *résolvante générique L -relative par Θ*

$$R_{\Theta, L} := \prod_{\Psi \in L \cdot \Theta} (x - \Psi)$$

- $R_{\Theta,L}$ est le polynôme minimal de Θ sur $\mathcal{K}(\mathbf{x})^L$
- $H < L < \mathfrak{S}_n$; Θ est un élément $\mathcal{K}(\mathbf{x})^L$ -primitif du corps $\mathcal{K}(\mathbf{x})^H$ si et seulement si Θ est un H -invariant L -primitif (d'où la terminologie !)
- la H -résolvante générique L -relative $R_{\Theta,L}$ d'un H -invariant L -primitif Θ :

$$R_{\Theta,L,\mathbf{x}} = \prod_{\tau \in L/H} (x - \tau.\Theta)$$

- le degré de l'extension $\mathcal{K}(\mathbf{x})^H$ du corps $\mathcal{K}(\mathbf{x})^L$ et l'indice de H dans L sont identiques :

$$[\mathcal{K}(\mathbf{x})^L : \mathcal{K}(\mathbf{x})^H] = [L : H]$$

- **Extension-contraction : corps et idéaux galoisiens**
 - (i) \mathfrak{S} est le seul idéal galoisien défini avec \mathbf{x} ; i.e. tout sous-groupe de \mathfrak{S}_n définit le même idéal galoisien, celui des relations symétriques entre les x_i .
 - (ii) il existe une bijection entre les sous-groupes de \mathfrak{S}_n et les corps intermédiaires entre k et $k(\mathbf{x})$
- lien avec l'idéal des relations symétriques \mathfrak{S} :

$$R_{\Theta,\mathfrak{S}_n} = R_{\Theta,\mathfrak{S}}$$

- Attention : la notation $R_{\Theta,I} := R_{\Theta,L,\alpha}$, I idéal galoisien, n'est valide que pour $L = \text{Max}(I, \alpha)$; donc ici, elle n'a de sens que pour $L = \mathfrak{S}_n$.

Evaluation : point de vue lagrangien

Posons $G = \text{Gal}_k(\alpha)$.

- nous notons avec un \sim l'évaluation envoyant x_i sur α_i
- $H < \mathfrak{S}_n$, $K := \mathcal{K}(\mathbf{x})^H$;

$$\tilde{K} = k(\alpha)^{H \cap G}$$

- en particulier,
 - (i) $(\forall H > G)$, $\tilde{K} = k(\alpha)^G$
 - (ii) $(\forall H < G)$, $\tilde{K} = k(\alpha)^H$

- Evaluation de la résolvante générique :

$$\widetilde{R_{\Theta,L}} = R_{\Theta,L,\alpha}$$

- $H < L < \mathfrak{S}_n$, Θ H -invariant L -primitif, $\theta = \tilde{\Theta}$; si θ est une racine simple de $R_{\Theta, L, \alpha}$ alors θ est un élément $k(\alpha)^{L \cap G}$ -primitif du corps $k(\alpha)^{H \cap G}$ de polynôme minimal h sur $k(\alpha)^{L \cap G}$:

$$k(\alpha)^{H \cap G} = k(\alpha)^{L \cap G}(\theta)$$

et, par conséquent, $\deg_x(h) = [L \cap G : G \cap H]$

- C.P. si $G < L$ alors $k = k(\alpha)^{L \cap G}$, $R_{\Theta, L, \alpha} \in k[x]$ et
 $\deg_x(h) = [G : G \cap H]$

- (effectivité du théorème de l'élément primitif) Soient $H_1 \subset H_2 \subset \text{Gal}_k(\alpha)$, $K_i =: k(\alpha)^{H_i}$; Θ un H_1 -invariant H_2 -primitif α -séparable ; alors $\tilde{\Theta}$ est un élément K_2 -primitif de K_1 :

$$K_1 = K_2(\tilde{\Theta})$$

- Soient G et H deux sous-groupes de S_n contenus dans L et tels que $L = GL = LH$ (si L est un groupe cela signifie que G et H sont deux sous-groupes de L) ; $L = \tau_1 H + \cdots + \tau_e H$; $H_i := H^{\tau_i}$; $\Theta_i := \tau_i \Theta$ est un H_i -invariant L -primitif ; $\theta_i := \tilde{\Theta}_i$; soient $\theta_1, \dots, \theta_r$ les s racines d'un facteur simple h de $R_{\Theta, L, \alpha}$; où $V := \bigcap_{i=1}^r H_i$; alors

$$\text{Gal}_k(h) = G/G \cap V;$$

pour $1 \leq i \leq r$, $\deg_x(h) = [G : G \cap H_i]$

- les groupes de Galois des facteurs d'une résolvantes ainsi que leurs degrés respectifs sont obtenus par le théorème précédent ; ils coïncident avec les matrices de groupes et de partitions de L (voir [19])
- Pour les cas des **racines non simples et des facteurs multiples de résolvantes, les théorèmes se généralisent** : voir [18] qui les illustre avec des exemples concrets.

REFERENCES

- [1] Ines Abdeljaouad. Calculs d'invariants primitifs de groupes finis. *Theor. Inform. Appl.*, 33(1):59–77, 1999.
 $\text{\protect\vrule width0pt\protect\href{http://www-gap.mcs.st-and.ac.uk/Gap3/Contrib3/contrib.html}\{h$
- [2] I. Abdeljaouad-Tej, S. Orange, G. Renault, and A. Valibouze. Computation of the decomposition group of a triangular ideal. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 15(3-4):279–294, 2004.
- [3] J.-M. Arnaudès and A. Valibouze. Lagrange resolvents. *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118:23–40, 1997.

- [4] P. Aubry and A. Valibouze. Using Galois ideals for computing relative resolvents. *J. Symbolic Comput.*, 30(6):635–651, 2000.
- [5] Philippe Aubry and Annick Valibouze. Calcul algébrique efficace de résolvantes relatives. Archives HAL-CNRS, 07 2009.
- [6] A. Cauchy. Usage des fonctions interpolaires dans la détermination des fonctions symétriques des racines d’une équation algébrique donnée. *Oeuvres*, 5:473 Extrait 108, 1840.
- [7] M. Lederer. Explicit constructions in splitting fields of polynomials. *Riv. Mat. Univ. Parma* (7), 3*:233–244, 2004.
- [8] Orange, S. and Renault, G. and Valibouze, A. Calcul efficace de corps de décomposition. Rapport 2003/005 du laboratoire LIP6 ; <http://www.lip6.fr/>, 2003. Dernières versions dans les thèses de G. Renault (LIP6, 2005) puis S. Orange (LIP6, 2006).
- [9] N. Rennert and A. Valibouze. Calculs de résolvantes avec les modules de Cauchy. *Experiment. Math.*, 8(4):351–366, 1999.
- [10] J. McKay and R.-P. Stauduhar. Finding relations among the roots of an irreducible polynomial. In *Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Kihei, HI)*, pages 75–77, New York, 1997. ACM.
- [11] A. Valibouze. Étude des relations algébriques entre les racines d’un polynôme d’une variable. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 6(4):507–535, 1999. (Version longue du rapport LIP6 1997/014).
- [12] A. Valibouze. Sur les relations entre les racines d’un polynôme. *Acta Arithmetica*, 131.1:1–27, 2008.
- [13] A. Valibouze. Dépendance algébrique des zéros de polynômes et groupes de Galois. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*, 48(96)(1):73–96, 2005.
- [14] A. Valibouze. *Theory of Equations, Lagrange and Galois Theory*, 1995. Archives CEL-CNRS
- [15] A. Valibouze. Base de Gröbner de l’idéal galoisien du groupe alterné. Archives HAL-CNRS, 02 2009.
- [16] A. Valibouze. Idéaux galoisiens : Base de données. http://docs.google.com/Doc?id=dd9dj4wn_44hgttks3d Base de données d’idéaux galoisiens purs avec leur groupe de décomposition., 03 2009.
- [17] A. Valibouze. La Résolvante de Lagrange et ses Applications. Archives HAL-CNRS, 04 2009.
- [18] A. Valibouze. Résolvantes, groupe de Galois et Idéaux galoisiens. Archives HAL-CNRS, 10 2009.
- [19] A. Valibouze. Computation of the Galois groups of the resolvent factors for the direct and inverse Galois problems. In *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Paris, 1995)*, volume 948 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 456–468. Springer, Berlin, 1995.
- [20] A. Valibouze. Galois theory and reducible polynomials. Publication interne 99.03, Équipe MAX, laboratoire LIX, École Polytechnique, France, 1999. (<http://www.lix.polytechnique.fr/~max/publications/>).
- [21] A. Valibouze. Classes doubles, idéaux de Galois et résolvantes. *Rev. R. de Math. Pures et Appl.*, 52 (2007), no 1, 95–109.
- [22] K. Yokoyama. A modular method for computing the Galois groups of polynomials. *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118:617–636, 1997. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).
- [23] K. Yokoyama. A modular method to compute the splitting field of a polynomial. *Communication privée*, 1999.

UPMC, 4, PLACE JUSSIEU, 75252 PARIS CEDEX 05

E-mail address: annick.valibouze@upmc.fr www-spiral.lip6.fr/~avb/